Основные теоремы о дифференцируемых функциях.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки c.

Определение 1. *Функция $y = f(x)$ **возрастает** в точке c, если найдется такое число $\delta > 0$, что $f(x) < f(c)$ при всех $x \in (c-\delta, c)$ и $f(x) > f(c)$ при всех $x \in (c, c+\delta)$. $f(x)$ **убывает** в точке c, если найдется такое число $\delta > 0$, что $f(x) > f(c)$ при всех $x \in (c-\delta, c)$ и $f(x) < f(c)$ при всех $x \in (c, c+\delta)$.*

Определение 2. *Функция $y = f(x)$ имеет в точке c **локальный максимум (минимум)**, если найдется такое число $\delta > 0$, что $f(x) \leqslant f(c)$ $(f(x) \geqslant f(c))$ при всех $x \in B_\delta(c)$.*

*Если функция $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум или минимум, то говорят, что она имеет в этой точке **локальный экстремум**.*

Теорема 1. (Достаточное условие возрастания (убывания) функции в точке). *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке c и $f'(c) > 0$ $(f'(c) < 0)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) в точке c.*

Доказательство. Рассмотрим случай $f'(c) > 0$ (случай $f'(c) < 0$ рассматривается аналогично). Поскольку по определению $f'(c) = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$, то для любого вещестенного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех значениях x из $\delta-$окрестности точки c будет выполнено:

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)\right| < \varepsilon.$$

Выберем $\varepsilon = f'(c)$, тогда для любого $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(c)$ будет верно: $0 < \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} < 2f'(c)$. Так как $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$, то из последнего неравенства вытекает, что $f(x) < f(c)$ при всех $x \in (c-\delta, c)$ и $f(x) > f(c)$ при всех $x \in (c, c+\delta)$, то есть функция $f(x)$ возрастает в точке c. □

Пример 1. *1) Рассмотрим функцию $y = \sin x$. $y'(0) = 1$, следовательно, функция возрастает в точке $x = 0$.*

2) Рассмотрим теперь функцию $y = \sin^3 x$. $y'(0) = 3\sin^2 x \cdot \cos x|_{x=0} = 0$, тем не менее функция возрастает в точке $x = 0$. Видим, что условие теоремы является достаточным, но не необходимым.

Теорема 2. (Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции). *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке c и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $f'(c) > 0$ $(f'(c) < 0)$. Тогда функция $f(x)$ возрастает (убывает) в точке c. Но по условию она имеет в этой точке экстремум. Мы пришли к противоречию; следовательно, наше предположение неверно и $f'(c) = 0$. □

Пример 2. *1) Рассмотрим функцию $y = \cos x$. В точке $x = 0$ имеет локальный максимум; $f'(0) = 0$.*

2) Рассмотрим теперь функцию $y = x^3$. $y'(0) = 0$, Но экстремума в точке $x = 0$ нет. Видим, что условие теоремы является необходимым, но не достаточным.

3) У функции $y = |x|$ производная в точке $x = 0$ не существует, хотя это точка локального минимума (в случае недифференцируемых функций теорему применять не можем).

Будем теперь рассматривать функцию $f(x)$, определенную на сегменте $[a, b]$.

Теорема 3. (Ролль). *Пусть функция $y = f(x)$: 1) непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) дифференцируема на интервале (a, b); 3) $f(a) = f(b)$. Тогда найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f'(\xi) = 0$.*

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она достигает на нем своих точной верхней и нижней граней (вторая теорема Вейерштрасса). Обозначим $m = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) = f(x_1)$, $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in [a, b]$.

Заметим, что, если $m = M$, то $f(x) \equiv m = M$ на $[a, b]$. В этом случае $f'(x) = 0$ при всех $x \in (a, b)$. Пусть теперь $m < M$. Если $f(a) = m$ или $f(b) = m$, то $x_2 \in (a, b)$ (поскольку $f(a) = f(b)$). Значит, в точке x_2 функция $f(x)$ имеет локальный максимум, следовательно, $f'(x_2) = 0$. Аналогично, если $f(a) = M$ или $f(b) = M$, то $x_1 \in (a, b)$ и в точке x_1 функция $f(x)$ имеет локальный минимум, следовательно, $f'(x_1) = 0$. Остался только случай, когда $x_1, x_2 \in (a, b)$. В этом случае $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. □

Геометрический смысл теоремы Ролля заключается в следующем: при выполнении всех условий теоремы на кривой $y = f(x)$, $a < x < b$, найдется точка, касательная в которой будет параллельна оси абсцисс.

Заметим, что в случае нарушения хотя бы одного из трех условий теоремы ее заключение, вообще говоря, перестает быть верным. Приведем соответствующие примеры.

Пример 3. *1) Функция $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ удовлетворяет условиям 2 и 3 теоремы, но не является непрерывной на сегменте $[0, 1]$. Очевидно, что всюду на интервале $(0, 1)$ $f'(x) = 1 \neq 0$.*

2) Функция $f(x) = |x|$ удовлетворяет условиям 1 и 3 на сегменте $[-1, 1]$, но не является дифференцируемой на интервале $(-1, 1)$ (не существует производная в точке $x = 0$). При $-1 < x < 0$ $f'(x) = -1$; при $0 < x < 1$ $f'(x) = 1$.

3) Функция $f(x) = x$ удовлетворяет условиям 2 и 3 на интервале $(0, 1)$, но $f(0) \neq f(1)$ и $f'(x) = 1$ при всех $x \in (0, 1)$.

Теорема 4. (Лагранж). *Пусть функция $y = f(x)$: 1) непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) дифференцируема на интервале (a, b). Тогда найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{1}$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Заметим, что эта функция также непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a,b) (поскольку представляет собой линейную комбинацию функции $f(x)$ и линейной функции). Заметим также, что $F(a) = f(a) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$; $F(b) = f(b) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0$. Значит, функция $F(x)$ удовлетворяет на сегменте $[a,b]$ всем условиям теоремы Ролля; следовательно, на интервале (a,b) есть такая точка ξ, что $F'(\xi) = 0$. С другой стороны, $F'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Получаем, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$. $\square$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: при выполнении всех условий теоремы на кривой $y = f(x)$, $a < x < b$, найдется точка, касательная в которой будет параллельна секущей, проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$.

Замечание 1. *Формулу* (1) *часто называют* ***формулой Лагранжа*** *или* ***формулой конечных приращений****. Если положить в ней $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$, то* (1) *можно переписать в виде:*

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x) = 0$ при всех $x \in (a,b)$, то $f(x) \equiv const$ на (a,b).*

Доказательство. Пусть точка $x_0 \in (a,b)$. Возьмем произвольное $x \in (a,b)$ (пусть для определенности $x > x_0$). Тогда $f(x)$ дифференцируема на $[x_0, x]$, следовательно, непрерывна на этом сегменте. Тогда по теореме Лагранжа найдется такая точка $\xi \in (x_0, x)$, что $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0$, то есть $f(x) = f(x_0)$. В силу произвольности выбора точки x получаем, что $f(x) = f(x_0)$ при всех $x \in (a,b)$, то есть $f(x) \equiv const$ на (a,b). $\square$

Следствие 2. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Тогда*

1) $f(x)$ не убывает (не возрастает) на (a,b) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) при всех $x \in (a,b)$;

2) Если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) при всех $x \in (a,b)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на (a,b).

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть $f(x)$ не убывает на (a,b). Предположим, что существует такая точка $x_1 \in (a,b)$, что $f'(x_1) < 0$. Тогда $f(x)$ убывает в точке x_1 (достаточное условие убывания функции в точке). Значит, найдется точка $x_2 > x_1$, для которой будет выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Но это противоречит тому, что функция $f(x)$ является неубывающей. Значит, наше предположение неверно и $f'(x) \geqslant 0$ при всех $x \in (a,b)$.

Достаточность. Пусть $f'(x) \geqslant 0$ при всех $x \in (a,b)$. Выберем точки $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$. Заметим, что функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на сегменте $[x_1, x_2]$, значит, по теореме Лагранжа, найдется такая точка $\xi \in (x_1, x_2)$, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Так как $f'(\xi) \geqslant 0$, $x_2 - x_1 > 0$, то и левая часть последнего равенства неотрицательна. Это означает, что $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, если только $x_1 < x_2$, то есть функция $f(x)$ не убывает на (a,b).

2)Пусть $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a,b)$. Выберем точки $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$. Поскольку $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на сегменте $[x_1, x_2]$, то по теореме Лагранжа, найдется такая точка $\xi \in (x_1, x_2)$, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Так как $f'(\xi) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$, то и левая часть последнего равенства строго положительна. Это означает, что $f(x_2) > f(x_1)$, если только $x_1 < x_2$, то есть функция $f(x)$ возрастает на (a,b). □

Замечание 2. *Условие $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a,b)$ не является необходимым условием возрастания функции на интервале (a,b). Действительно, функция $f(x) = x^3$, например, возрастает на $(-1,1)$, но $f'(0) = 0$.*

Следствие 3. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) (конечном или бесконечном) и ее производная ограничена на этом интервале единой константой. Тогда функция f равномерно непрерывна на (a,b).*

Доказательство. Пусть f дифференцируема на интервале (a,b) и существует $C > 0$, т.ч. $|f'(x)| \leqslant C$ при всех $x \in (a,b)$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $\delta = \varepsilon / C > 0$, такое, что для любых $x', x'' \in (a,b)$, $|x' - x''| < \delta$, имеет место оценка

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)(x' - x'')| \leqslant C|x' - x''| < C\delta = \varepsilon.$$

Это и означает, что функция f равномерно непрерывна на (a,b). □

Следствие 4. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Тогда ее производная $f'(x)$ не может иметь на этом интервале ни устранимых разрывов, ни разрывов первого рода.*

Доказательство. Пусть точка c Принадлежит интервалу (a,b) и в этой точке функция $f'(x)$ имеет конечные односторонние пределы: $l_1 = \lim\limits_{x \to c-0} f'(x)$ и $l_2 = \lim\limits_{x \to c+0} f'(x)$. Возьмем произвольную точку $x \in (a,b)$, $x > c$. Так как $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на сегменте $[c,x]$, то найдется такая точка $\xi \in (c,x)$, что $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi)$. Значит,

$$f'(c) = \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c+0} f'(\xi) = l_2$$

(предел правой части существует, поскольку существует предел левой части). Аналогично $f'(c) = l_1$. Значит, функция $f(x)$ непрерывна в точке c. □

Пример 4. *Разрывы второго рода производная дифференцируемой функции иметь может. Например, рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Она непрерывна и дифференцируема на интервале $(-1,1)$; ее производная $f'(x)$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода (проверьте это самостоятельно).*

Теорема 5. (Коши). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на сегменте $[a,b]$; дифференцируемы на интервале (a,b), причем $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in (a,b)$. Тогда найдется такая точка $\xi \in (a,b)$, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{2}$$

Доказательство. Покажем сначала, что $g(a) \neq g(b)$. Действительно, если $g(a) = g(b)$, то функция $g(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Значит, существует такая точка $\zeta \in (a,b)$, что $g'(\zeta) = 0$, но по условию $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a,b)$.

Введем теперь вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$. Она непрерывна на сегменте $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b) (как линейная комбинация функций $f(x)$ и $g(x)$). Кроме того, $F(a) = F(b) = 0$. Значит, согласно теореме Ролля, существует такая точка $\xi \in (a,b)$, что

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi).$$

Так как $g'(\xi) \neq 0$, то получаем, что $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. □

Замечание 3. *Формула (2) называется **обобщенной формулой конечных приращений** или **формулой Коши**. Формула Лагранжа является ее частным случаем при $g(x) = x$. Геометрический смысл теоремы Коши заключается в следующем: если рассмотреть параметрически заданную кривую $x = g(t)$, $y = f(t)$, то при выполнении условий теоремы на отрезке между $g(a)$ и $g(b)$ найдется точка ξ, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки с координатами $(g(a), f(a))$ и $(g(b), f(b))$.*

Раскрытие неопределенностей.

Определение 3. *Говорят, что отношение двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой **неопределенность вида** $\dfrac{0}{0}$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.*

Аналогично можно определить неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ при $x \to a-0$, $x \to a+0$, $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$.

Теорема 6. *Пусть 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на интервале $(a-\delta, a)$ для некоторого $\delta > 0$; 2) $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a-\delta, a)$; 3) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} g(x) = 0$; 4) существует предел $\lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ ($A \in \mathbb{R}$ или $A = \infty$). Тогда существует и предел $\lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.*

Доказательство. Положим $f(a) = g(a) = 0$. Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность, такая, что $x_n \to a$ При $n \to +\infty$, $x_n < a$. Тогда существует такой натуральный номер N, что $x_n \in (a - \delta, a)$ при всех $n \geqslant N$. Рассмотрим сегмент $[x_n, a]$, $n \geqslant N$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на нем (поскольку $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} g(x) = f(a) = g(a) = 0$) и дифференцируемы на интервале (x_n, a); кроме того, $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in (x_n, a)$. Значит, существует такая точка $\xi_n \in (x_n, a)$, что $\dfrac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$ (теорема Коши). Так как $f(a) = g(a) = 0$, то из последнего сотношения получаем, что $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$. Заметим теперь, что $\xi_n \to a$ при $n \to +\infty$ (так как $x_n < \xi_n < a$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$). Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = A$ (определение предела функции по Гейне). Но это означает, что существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = A$. В силу произвольности выбора последовательности $\{x_n\}$ и определения предела функции по Гейне получаем, что $\lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. □

Совершенно аналогично можно доказать следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на интервале $(a, a + \delta)$ для некоторого $\delta > 0$; 2) $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, a + \delta)$; 3) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$; 4) существует предел $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ ($A \in \mathbb{R}$ или $A = \infty$). Тогда существует и предел $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.*

Из двух приведенных выше теорем немедленно вытекает

Следствие. (Первое правило Лопиталя). *Пусть 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на множестве $\overset{\circ}{B}_\delta(a)$ для некоторого $\delta > 0$; 2) $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$; 3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$; 4) существует предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ ($A \in \mathbb{R}$ или $A = \infty$). Тогда существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.*

Определение 4. *Говорят, что отношение двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой* **неопределенность вида** $\dfrac{\infty}{\infty}$ *при $x \to a$, если $f(x) \to \infty$ ($\pm\infty$), $x \to a$; $g(x) \to \infty$ ($\pm\infty$), $x \to a$.*

Аналогично можно определить неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ при $x \to a - 0$, $x \to a + 0$, $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$.

Теорема 8. *Пусть 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на интервале $(a - \delta, a)$ для некоторого $\delta > 0$; 2) $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a - \delta, a)$; 3) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$,*

$\lim\limits_{x\to a-0} g(x) = \infty$; *4) существует предел* $\lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ *(*$A \in \mathbb{R}$ *или* $A = \infty$*). Тогда существует и предел* $\lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство. 1) Пусть сначала $A \in \mathbb{R}$. Так как $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a-0} g(x) = \infty$, то, не ограничивая общности, можем считать, что $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ при всех $x \in (a-\delta, a)$. Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность, такая, что $x_n \to a$ при $n \to +\infty$, $x_n < a$. Тогда существует такой натуральный номер $N = N(\delta)$, что $x_n \in (a-\delta, a)$ при всех $n \geqslant N$. Выберем натуральные числа m, n, такие, что $N \leqslant m < n$, и рассмотирм сегмент, заключенный между точками x_m и x_n. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы на этом сегменте, причем $g'(x) \neq 0$ на нем. Значит, по теореме Коши, на соответствующем интервале найдется такая точка ξ_{mn}, что

$$\frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})} = \frac{f(x_n) - f(x_m)}{g(x_n) - g(x_m)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \cdot \frac{1 - f(x_m)/f(x_n)}{1 - g(x_m)/g(x_n)}$$

(можем делить на $f(x_n)$ и $g(x_n)$, поскольку эти выражения отличны от нуля). Отсюда получаем, что (если $f(x_n) \neq f(x_m)$)

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})} \cdot \frac{1 - g(x_m)/g(x_n)}{1 - f(x_m)/f(x_n)}.$$

Зафиксируем теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то найдется такое $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \in (0, \delta)$, что неравенство $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ будет выполено при всех $x \in (a-\delta_1, a)$. Далее, так как $x_n \to a$ при $n \to +\infty$, $x_n < a$, то существует такое натуральное число M, $M > N$, что $x_n \in (a-\delta_1, a)$ при всех $n \geqslant M$. Значит, для любого $n > M$ будет выполнено

$$\left|\frac{f'(\xi_{Mn})}{g'(\xi_{Mn})} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

(так как точка ξ_{Mn} лежит между x_M И x_n, а $x_M, x_n \in (a-\delta_1, a)$).

Теперь рассмотрим выражение $\dfrac{1 - g(x_M)/g(x_n)}{1 - f(x_M)/f(x_n)}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = \infty$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - g(x_M)/g(x_n)}{1 - f(x_M)/f(x_n)} = 1$. Значит, найдется такой натуральный номер K, $K > M$, что при всех $n \geqslant K$ будет справедлива оценка:

$$\left|\frac{1 - g(x_M)/g(x_n)}{1 - f(x_M)/f(x_n)} - 1\right| < \frac{\varepsilon/2}{|A| + \varepsilon/2} \tag{4}$$

(так как $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \infty$, то можем считать, что $f(x_n) \neq f(x_M)$, то есть знаменатель в левой части неравенства не обращается в 0). Окончательно получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $K = K(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant K$ выполнено:

$$\left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi_{Mn})}{g'(\xi_{Mn})} \cdot \frac{1 - g(x_M)/g(x_n)}{1 - f(x_M)/f(x_n)} - A\right| \leqslant \left|\frac{f'(\xi_{Mn})}{g'(\xi_{Mn})}\right| \cdot \left|\frac{1 - g(x_M)/g(x_n)}{1 - f(x_M)/f(x_n)} - 1\right| +$$

$$+\left|\frac{f'(\xi_{Mn})}{g'(\xi_{Mn})}-A\right| < \left(\frac{\varepsilon}{2}+|A|\right)\cdot\frac{\varepsilon/2}{|A|+\varepsilon/2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

(воспользовались оценками (3) и (4)). Это означает, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}=A$, откуда, в силу произвольности выбора последовательности $\{x_n\}$, вытекает, что $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

2) Пусть теперь $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{g'(x)}{f'(x)}=0$. Поскольку $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, то существует такое число $\delta_1\in(0,\delta)$, что $|f'(x)|>|g'(x)|$ для любого $x\in(a-\delta_1,a)$. Но $g'(x)\neq 0$ при всех $x\in(a-\delta_1,a)$, следовательно, и $f'(x)\neq 0$ при всех $x\in(a-\delta_1,a)$. Значит, можем применить рассуждения пункта 1 к отношению $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ и получить, что $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$. Но это и означает, что $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$. □

Аналогично доказывается

Теорема 9. *Пусть 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на интервале $(a,a+delta)$ для некоторого $\delta>0$; 2) $g'(x)\neq 0$ при всех $x\in(a,a+\delta)$; 3) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0}g(x)=\infty$; 4) существует предел $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ ($A\in\mathbb{R}$ или $A=\infty$). Тогда существует и предел $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.*

Из двух последних теорем вытекает

Следствие. (Второе правило Лопиталя). *Пусть 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на множестве $\overset{\circ}{B}_\delta(a)$ для некоторого $\delta>0$; 2) $g'(x)\neq 0$ при всех $x\in\overset{\circ}{B}_\delta(a)$; 3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$; 4) существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ ($A\in\mathbb{R}$ или $A=\infty$). Тогда существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.*

Замечание 4. *И в первом, и во втором правилах Лопиталя можно заменять условия $x\to a\pm 0$, $x\to a$ на условия $x\to\pm\infty$, $x\to\infty$: например,*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{x=\frac{1}{t}\right\}=\lim_{t\to 0+0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{t\to 0+0}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g(1/t)(-1/t^2)}=\lim_{t\to 0+0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример 5. *1)*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

2)

$$\lim_{x\to 0+0}x^x=\lim_{x\to 0+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}(x\ln x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{1/x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1/x}{(-1/x^2)}}=e^0=1.$$

3) Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$. *Применим формально правило Лопиталя:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-cos\frac{1}{x}}{\cos x}.$$

Предел в правой части последнего соотношения не существует, так как $\lim\limits_{x\to 0}2x\sin\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, *а функция* $\cos\dfrac{1}{x}$ *не имеет предела в точке* 0. *Однако исходный предел можно вычислить:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Правило Лопиталя здесь неприменимо, поскольку одним из условий теоремы является существование предела отношения производных (конечного или бемконечного); в данном случае он не существует.

4) Рассмотрим функции $f(x)=1+2x+\sin 2x$ *и* $g(x)=(2x+\sin 2x)e^{\sin x}$. *Их отношение представляет собой неопределенность вида* $\dfrac{\infty}{\infty}$ *при* $x\to+\infty$. *Применим формально правило Лопиталя:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+2\cos 2x}{(2+2\cos 2x)e^{\sin x}+(2x+\sin 2x)e^{\sin x}\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\cos^2 x}{e^{\sin x}(4\cos^2 x+(2x+\sin 2x)\cos x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\cos x}{e^{\sin x}(4\cos x+2x+\sin 2x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\frac{\cos x}{x}}{e^{\sin x}\left(1+\frac{4\cos x+\sin 2x}{x}\right)}=0.$$

Однако предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *не существует: рассмотрим две последовательности аргументов* $\{x'_n\}=\{2\pi n\}$ *и* $\{x''_n\}=\left\{\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right\}$. *Тогда* $x'_n\to+\infty$ *при* $n\to+\infty$, $x''_n\to+\infty$ *при* $n\to+\infty$; *при этом* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(x'_n)}{g(x'_n)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+4\pi n}{4\pi n}=1$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(x''_n)}{g(x''_n)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\pi+4\pi n}{(\pi+4\pi n)\cdot e}=\dfrac{1}{e}$.

Правило Лопиталя здесь неприменимо, поскольку одним из условий теоремы является условие отличия от нуля производной функции $g(x)$ *в некоторой окрестности точки* a; *в данном случае* $g'(x)$ *обращается в* 0 *в точках вида* $\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, *которые есть в любой окрестности точки* $+\infty$.

Формула Тейлора.

Теорема 10. (Формула Тейлора). *Пусть функция $y = f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в $B_\delta(a)$ для некоторого $\delta > 0$. Пусть точка $x \in B_\delta(a)$, число $p > 0$ произвольно. Тогда существует такая точка ξ, лежащая между a и x, что*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \qquad (5)$$

где

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi). \qquad (6)$$

Определение 5. *Формула (5) называется* ***формулой Тейлора*** *с центром в точке a; выражение $R_{n+1}(x)$ —* ***остаточным членом*** *формулы Тейлора; остаточный член вида (6) называется* ***остаточным членом в общей форме*** *или* ***в форме Шлемильха-Роша.***

Доказательство. Обозначим

$$\varphi(x,a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Тогда $R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x,a)$. Пусть для определенности $x \in (a, a+\delta)$ (случай $x \in (a-\delta, a)$ рассматривается аналогично). Введем вспомогательную функцию

$$\psi(t) = f(x) - \varphi(x,t) - (x-t)^p Q(x), \quad a \leqslant t \leqslant x,$$

где $Q(x) = \dfrac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^p}$. Так как $\varphi(x,t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$, а все функции $f^{(k)}(t)$, $k = 1, \dots, n$ дифференцируемы на промежутке $[a, a+\delta)$ по крайней мере один раз, то можем утверждать, что функция $\psi(t)$ непрерывна и дифференцируема на сегменте $[a,x]$ (как композиция дифференцируемых функций и многочленов). Кроме того, $\psi(a) = f(x) - \varphi(x,a) - R_{n+1}(x) = 0$; $\psi(x) = f(x) - \varphi(x,x) = f(x) - f(x) = 0$. Следовательно, существует такая точка $\xi \in (a,x)$, что $\psi'(\xi) = 0$ (теорема Ролля). Вычислим $\psi'(\xi)$:

$$\psi'(\xi) = -(\varphi'(x,t))|_{t=\xi} + p(x-\xi)^{p-1}Q(x) = -\left(f'(\xi) - \frac{f'(\xi)}{1!} + \frac{f''(\xi)}{1!}(x-\xi) - \frac{f''(\xi)}{2!}\cdot 2(x-\xi) + \right.$$

$$+\frac{f'''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 - \frac{f'''(\xi)}{3!}\cdot 3(x-\xi)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\cdot n(x-\xi)^{n-1} +$$

$$\left. + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\right) + p(x-\xi)^{p-1}Q(x) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + p(x-\xi)^{p-1}Q(x).$$

Так как $\psi'(\xi) = 0$, то получаем, что $Q(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p} \cdot \dfrac{(x-\xi)^n}{(x-\xi)^{p-1}}$. Отсюда следует, что

$$R_{n+1}(x) = Q(x)(x-a)^p = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p} \cdot \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p (x-\xi)^{n+1}.$$

□

Определение 6. *Многочлен* $\varphi_n(x,a) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ *называется* ***многочленом Тейлора*** *степени n функции $f(x)$ в точке a.*

Замечание 5. *1) Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке a. Тогда*

$$\varphi_n(a,a) = f(a), \quad \varphi_n'(a,a) = f'(a), \dots, \varphi^{(n)}(a,a) = f^{(n)}(a). \tag{7}$$

2) Если $f(x) = P(x)$ — многочлен степени n, то $P^{(n+1)} \equiv 0$ и формула (5) имеет вид $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ — ***формула Тейлора для многочленов.***

Следствие 1. (Остаточный член в форме Лагранжа). *Пусть функция $y = f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в $\delta-$окрестности точки a для некоторого $\delta > 0$; точка $x \in B_\delta(a)$. Тогда существует такое число $\theta_1 \in (0,1)$, что $f(x) = \varphi_n(x,a) + R_{n+1}(x)$, где*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta_1(x-a)).$$

Доказательство. Положим в теореме $p = n+1$. Тогда формула (6) примет вид:

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^{n+1} \cdot \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!(n+1)} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta_1(x-a)),$$

где $a+\theta_1(x-a) = \xi$. Так как точка ξ лежит между a и x, то $\theta_1 \in (0,1)$. □

Следствие 2. (Остаточный член в форме Коши). *Пусть функция $y = f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в $\delta-$окрестности точки a для некоторого $\delta > 0$; точка $x \in B_\delta(a)$. Тогда существует такое число $\theta_2 \in (0,1)$, что $f(x) = \varphi_n(x,a) + R_{n+1}(x)$, где*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta_2)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta_2(x-a)).$$

Доказательство. Положим в теореме $p = 1$. Тогда формула (6) примет вид:

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right) \cdot \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(\xi) = (x-a)\frac{(x-(a+\theta_2(x-a)))^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta_2(x-a)) =$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta_2)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta_2(x-a)),$$

где $a+\theta_2(x-a) = \xi$. Так как точка ξ лежит между a и x, то $\theta_2 \in (0,1)$. □

Замечание 6. *Поскольку точка ξ в теореме зависит от выбора числа p, а это число в следствиях 1 и 2 выбирается различным, то, вообще говоря, $\theta_1 \neq \theta_2$.*

Теорема 11. (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть функция $y = f(x)$ $(n-1)$ раз дифференцируема в $\delta-$окрестности точки a для некоторого $\delta > 0$ и n раз дифференцируема в самой точке a. Пусть $x \in B_\delta(a)$. Тогда*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \bar{o}((x-a)^n), \quad x \to a.$$

Доказательство. Пусть $R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi_n(x,a)$. Докажем, что $R_{n+1}(x) = \bar{o}((x-a)^n)$, $x \to a$. Воспользуемся формулами (7):

$$R_{n+1}(a) = f(a) - \varphi_n(a,a) = 0, \quad R'_{n+1}(a) = f'(a) - \varphi'_n(a,a) = 0, \dots$$

$$\dots, R^{(n)}_{n+1}(a) = f^{(n)}(a) - \varphi^{(n)}_n(a,a) = 0.$$

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n}$, применяя правило Лопиталя $n-1$ раз:

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R'_{n+1}(x)}{n(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R''_{n+1}(x)}{n(n-1)(x-a)^n} = \dots = \lim_{x\to a} \frac{R^{(n-1)}_{n+1}(x)}{n!(x-a)^n}$$

Последнее выражение по-прежнему представляет собой неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, но применять правило Лопиталя уже не можем: функция $R^{(n-1)}_{n+1}(x)$ уже, вообще говоря, не дифференцируема в окрестности точки a, а только в самой точке. Вычислим последний предел другим способом (воспользуемся при этом тем, что $R^{(n-1)}_{n+1}(a) = 0$):

$$\lim_{x\to a} \frac{R^{(n-1)}_{n+1}(x)}{n!(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R^{(n-1)}_{n+1}(x) - R^{(n-1)}_{n+1}(a)}{n!(x-a)^n} = \frac{1}{n!}\left(R^{(n-1)}_{n+1}(x)\right)'\Big|_{x=a} = \frac{1}{n!}R^{(n)}_{n+1}(a) = 0.$$

Получили, что $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = 0$, то есть действительно $R_{n+1}(x) = \bar{o}((x-a)^n)$ при $x \to a$. $\square$

Следствие. *Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в $\delta-$окрестности точки a для некоторого $\delta > 0$ и $(n+1)$ раз дифференцируема в самой точке a. Тогда для любого $x \in B_\delta(a)$ верно:*

$$f(x) = \varphi_n(x,a) + O((x-a)^{n+1}), \quad x \to a.$$

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в точке a и n раз — в $B_\delta(a)$. Тогда для любой точки $x \in B_\delta(a)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \bar{o}((x-a)^{n+1}) =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^{n+1}\left(\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + \bar{o}(1)\right) =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^{n+1} \cdot O(1), \quad x \to a.$$

$\square$

Определение 7. ***Формулой Маклорена*** *называется формула Тейлора с центром в точке $a = 0$, то есть формула*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdot + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)$ может иметь вид:

1) $R_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta_1 x)$, $0 < \theta_1 < 1$ — форма Лагранжа;

2) $R_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}(1-\theta_2)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta_2 x)$, $0 < \theta_2 < 1$ — форма Коши;

3) $R_{n+1}(x) = \bar{o}(x^n)$, $x \to 0$ — форма Пеано.

Замечание 7. *Если при всех $x \in B_\delta(0)$ существует $f^{(n)}(x)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то говорят, что $f(x)$* ***бесконечно дифференцируема*** *в $B_\delta(0)$. Если к тому же существует такая постоянная $M > 0$, что $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$ при всех $x \in B_\delta(0)$ и при всех $n \in \mathbb{N}$, то можем оценить остаток $R_{n+1}(x)$:*

$$|R_{n+1}(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta_1 x)\right| \leqslant \frac{M\delta^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in B_\delta(0).$$

Разложение по формуле Тейлора некоторых элементарных функций.

I. $f(x) = e^x$. Поскольку $f^{(n)}(x) = e^x$ для любого $n \in N$, то $f^{(n)}(0) = 1$. Следовательно,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta_1 x}$, $0 < \theta_1 < 1$.

Если $|x| \leqslant a$, $a > 0$, то $|R_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{a^{n+1}e^a}{(n+1)!} \to 0$ при $n \to +\infty$.

II. $f(x) = \sin x$. Поскольку $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$ для любого $n \in N$, то

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k,\ k = 1, 2, \dots, \\ (-1)^k, & n = 2k+1, k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Следовательно,

$$\sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{n+2}(x),$$

где $n = 2k+1$, $R_{n+2}(x) = \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}\sin\left(\theta_1 x + \pi + \dfrac{\pi n}{2}\right)$, $0 < \theta_1 < 1$.

Если $|x| \leqslant a$, $a > 0$, то $|R_{n+2}(x)| \leqslant \dfrac{a^{n+2}}{(n+2)!} \to 0$ при $n \to +\infty$.

III. $f(x) = \cos x$. Поскольку $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$ для любого $n \in N$, то

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k,\ k = 1, 2, \dots, \\ 0, & n = 2k+1, k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Следовательно,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{n+2}(x),$$

где $n = 2k$, $R_{n+2}(x) = \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!} \cos\left(\theta_1 x + \pi + \dfrac{\pi n}{2}\right)$, $0 < \theta_1 < 1$.

Если $|x| \leqslant a$, $a > 0$, то $|R_{n+2}(x)| \leqslant \dfrac{a^{n+2}}{(n+2)!} \to 0$ при $n \to +\infty$.

IV. $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, 1]$. Поскольку $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$, то $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, $n = 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta_1 x)^{n+1}} = \frac{(-1)^n (1-\theta_2)^n x^{n+1}}{(1+\theta_2 x)^{n+1}}, \quad \theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$$

(записали остаточный член в двух разных формах — Лагранжа и Коши).

1) Пусть $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)|1+\theta_1 x|^{n+1}} \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0, \quad n \to +\infty,$$

поскольку $|1 + \theta_1 x|^{n+1} \geqslant 1$.

2) Пусть тперь $-a \leqslant x < 0$, где $a \in (0, 1)$. Тогда

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{|x^{n+1}| \cdot |1-\theta_2|^n}{|1+\theta_2 x|^{n+1}} = |x|^{n+1} \cdot \left|\frac{1-\theta_2}{1+\theta_2 x}\right|^n \cdot \frac{1}{|1+\theta_2 x|} \leqslant \frac{a^{n+1}}{1-a} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Действительно, так как $0 < \theta_2 < 1$, то $0 \leqslant \dfrac{1-\theta_2}{1+\theta_2 x} \leqslant 1$.

Мы доказали, что $R_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to +\infty$ для всех $x \in (-1, 1]$.

V. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in (-1, 1)$. Поскольку $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, то $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$. Следовательно,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1-\theta_2)^n(1+\theta_2 x)^{\alpha-n-1}}{n!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Пусть $|x| \leqslant a$, $0 < a < 1$. Покажем, что существует такое натуральное число N, что для любого $n \geqslant N$ выполняется цепочка неравенств:

$$|R_{n+1}(x)| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\right| \cdot \left|\frac{1-\theta_2}{1+\theta_2 x}\right|^n \cdot |x|^{n+1} \cdot |1+\theta_2 x|^{\alpha-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\dots(|\alpha|+n)}{n!} a^{n+1} \max\{(1+a)^{\alpha-1}, (1-a)^{\alpha-1}\} \leqslant 2(1+n)^N a^{n+1} \max\{(1+a)^{\alpha-1}, (1-a)^{\alpha-1}\}.$$

Действительно, пусть $N = [|\alpha|] + 1$, $n \geqslant N$. Тогда

$$\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\dots(|\alpha|+n)}{n!} \leqslant \frac{N(N+1)\dots(N+n)}{n!} = \frac{(n+1)\cdot\dots\cdot(n+N)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot(N-1)} =$$

$$= (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)\cdot\left(\frac{n+3}{3}\right)\dots\left(\frac{n+N-1}{N-1}\right)(n+N) =$$

$$= (1+n)\cdot\left(1+\frac{n}{2}\right)\dots\left(1+\frac{n}{N-1}\right)\cdot(1+n)\cdot\left(\frac{n+N}{n+1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (1+n)^N \cdot \left(1+\frac{N-1}{n+1}\right) \leqslant 2(1+n)^N.$$

Так как $0 < a < 1$, то выражение $(1+n)^N a^{n+1}$ стремится к нулю при $n \to +\infty$. Значит, $R_{n+1}(x) \to 0$, $n \to +\infty$ при всех $x \in (-1, 1)$.

VI. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in [-1, 1]$. Поскольку $f^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin\left(n\left(\operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$, то

$$f^{(n)}(0) = (n-1)!\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ (-1)^k (2k)!, & n = 2k+1,\ k = 0, 1, \dots. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + R_{n+2}(x),$$

где $n = 2k+1$,

$$|R_{n+2}(x)| = \left|\frac{(n+1)!\sin\left((n+2)\left(\operatorname{arctg}\theta_1 x + \frac{\pi}{2}\right)\right) x^{n+2}}{(1+\theta_1^2 x^2)^{\frac{n+2}{2}} \cdot (n+2)!}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+2}}{|1+\theta_1^2 x^2|^{\frac{n}{2}+1}(n+2)} \leqslant \frac{|x|^{n+2}}{n+2}.$$

Пусть $|x| \leqslant a$, $a \in [0, 1]$, тогда $R_{n+2}(x) \leqslant \dfrac{a^{n+2}}{n+2} \to 0$ при $n \to +\infty$. Значит, $R_{n+2}(x) \to 0$ при всех $x \in [-1, 1]$.

Приложения формулы Тейлора.

1. Иррациональность числа e.

Покажем, что число e не является рациональным. Согласно полученной формуле,

$$e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1), \quad R_{n+1}(1) = \frac{e^{\theta_1}}{(n+1)!} 1^{n+1}, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Нам известно, что $2 < e < 3$, следовательно, $1 < e^{\theta_1} < 3$ и $\dfrac{1}{(n+1)!} < R_{n+1}(1) < \dfrac{3}{(n+1)!}$.

Предположим, что e рационально, то есть $e = \dfrac{p}{q}$, где $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, причем $q \geqslant 2$ (действительно, если $q = 1$, то e — целое, но это не так, поскольку $2 < e < 3$). Получаем, что

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} + R_{q+1}(1).$$

Отсюда

$$\frac{p}{q} \cdot q! = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) q! + R_{q+1}(1) \cdot q!,$$

следовательно, число $R_{q+1} \cdot q!$ является целым. Но из наших оценок следует, что

$$0 < \frac{1}{q+1} = \frac{q!}{(q+1)!} < R_{q+1}(1) < \frac{3q!}{(q+1)!} = \frac{3}{q+1} \leqslant 1.$$

Мы пришли к противоречию. Значит, наше предположение неверно, и число e является иррациональным.

2. Приближенные вычисления значений тригонометрических функций.

Заметим, что достаточно научиться вычислять значения функций $\sin x$ и $\cos x$ на промежутках $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. Зная их и применяя различные тригонометрические формулы, можно найти значение любой из тригонометрических функций в любой точке.

а)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + R_{n+2}(x),$$

причем $|R_{n+2}(x)| \leqslant \dfrac{a^{n+2}}{(n+2)!}$, если $|x| \leqslant a$. Пусть $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. При $n = 5$ имеем:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + R_7(x),$$

где

$$|R_7(x)| \leqslant \frac{(\pi/4)^7}{7!} < 10^{-4}.$$

а)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + R_{n+2}(x),$$

причем $|R_{n+2}(x)| \leqslant \dfrac{a^{n+2}}{(n+2)!}$, если $|x| \leqslant a$. Пусть $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. При $n = 6$ имеем:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + R_8(x),$$

где
$$|R_8(x)| \leqslant \frac{(\pi/4)^8}{8!} < 10^{-5}.$$

3. Вычисление пределов.

Выпишем формулы Маклорена с остаточным членом в форме Пеано для некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n), \quad x \to 0;$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \bar{o}(x^{2n+2}), \quad x \to 0;$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \bar{o}(x^{2n+1}), \quad x \to 0;$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \bar{o}(x^n), \quad x \to 0;$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \bar{o}(x^n), \quad x \to 0;$$
$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \bar{o}(x^{2n+2}), \quad x \to 0.$$

Формулы такого вида (описывающие поведение функции $f(x)$ при $x \to a$) называются `асимптотическими`.

1)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \bar{o}(x^4)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{6} + \bar{o}(x)\right) = \frac{1}{6}.$$

2)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[4]{e^{-x^2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \bar{o}(x^5)\right)^{1/2} - \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + \bar{o}(x^4)\right)^{1/4}}{x^4} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{4}\left(-x^2 + \frac{x^4}{2}\right) - \frac{3}{32}\left(-x^2 + \frac{x^4}{2}\right)^2\right) + \bar{o}(x^4)}{x^4} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^4}{32} - \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8} - \frac{3x^4}{32}\right) + \bar{o}(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{48} - \frac{1}{32} - \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \bar{o}(1)\right) = -\frac{1}{24}.$$

3)
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}+5} - e^x}{\ln(\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\left(\frac{1}{x}+5\right)\ln(1+x^2)} - e^x}{\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^3)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\left(\frac{1}{x}+5\right)\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \bar{o}(x^4)\right)} - e^x}{-\frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^3) + \bar{o}(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x+5x^2+\bar{o}(x^2)} - e^x}{-\frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + 5x^2 + \frac{1}{2}(x+5x^2)^2 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + \bar{o}(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + \bar{o}(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \bar{o}(1)}{-\frac{1}{2} + \bar{o}(1)} = -10.$$

4)

$$\lim_{x\to\infty} \left(2x^4 \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \sqrt[3]{8x^9 + 12x^8 + 14x^7 + 15x^6 + 16x^5}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(2x^4 \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \bar{o}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) + 2x^3 \left(1 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4x^2} + \frac{15}{8x^3} + \frac{2}{x^4}\right)^{1/3}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(-2x^3 - x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} + \bar{o}(1) + \right.$$

$$\left. +2x^3 \left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2x} + \frac{7}{4x^2} + \frac{15}{8x^3}\right) - \frac{2}{18}\left(\frac{3}{2x} + \frac{7}{4x^2}\right)^2 + \frac{10}{162}\left(\frac{3}{2x}\right)^3\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} + \frac{7x}{6} + \frac{5}{4} - \frac{x}{2} - \frac{7}{6} + \frac{5}{12} + \bar{o}(1)\right) = 0.$$

Упражнение 1. * *Пусть* $x_n = \operatorname{ctg} x_n$, *причем* $x_n \in (\pi n, \pi + \pi n)$. *Доказать, что* $x_n = \pi n + \dfrac{1}{\pi n} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, $n \to +\infty$.